

Aus dem Physikalischen Institut der Universität Erlangen

Mott-Streuung an Streufolien endlicher Dicke

Von

H. WEGENER

Mit 1 Figur im Text

(Eingegangen am 18. Februar 1958)

Transversal polarisierte Elektronen werden an einer dünnen Folie gestreut. Die Streuwahrscheinlichkeit wird nach der Foliendicke d entwickelt und der d^2 -Term dieser Entwicklung als Funktion der Elektronengeschwindigkeit $\beta = v/c$, des Streuwinkels ϑ_s und des Polarisationsgrades P berechnet. Der d^2 -Term enthält die bei Streuversuchen und Polarisationsmessungen schwer erfaßbaren Störungen durch Kleinwinkel- und Zweifachstreuung. Für die oft benutzte Streusubstanz Gold werden die Resultate für $0,4 \leq \beta \leq 0,8$ und $60^\circ \leq \vartheta_s \leq 120^\circ$ in Form einer Tabelle mitgeteilt. Sie sind mit der noch sehr spärlichen Erfahrung im Einklang. Diese Rechnungen wurden im Hinblick auf die Elektronenpolarisation beim β -Zerfall durchgeführt.

Einleitung

Seitdem bekannt wurde, daß die β -Zerfallselektronen wegen der Paritätsnichterhaltung teilweise polarisiert sind, ist die Mott-Streuung als Meßmethode für den Polarisationsgrad ein wesentliches Hilfsmittel der aktuellen Kernphysik geworden [2], [5], [6], [15]. Man läßt dabei den transversal polarisierten Elektronenstrahl auf eine möglichst dünne Streufolie fallen und bestimmt aus der Links-Rechts-Asymmetrie den Polarisationsgrad P . Um in diskutablen Zeiten zu statistisch genauen Resultaten zu gelangen, wird man die Streufolie möglichst dick wählen. Bei dickeren Folien treten aber Störeinflüsse auf, die das Ergebnis erheblich verfälschen können [6], [14]. Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluß solcher dickenabhängiger Störungen auf Streuintensität und Streuasymmetrie für nicht zu dicke Folien möglichst genau abzuschätzen, um die an solchen Folien gewonnenen Meßwerte auf die „Schichtdicke Null“ korrigieren zu können.

Cox et al. haben deutlich darauf hingewiesen, daß solche Störungen zwei Ursachen haben: Die Vielfachstreuung (= Kleinwinkelstreuung) [4] und die Zweifachstreuung (= Großwinkelstreuung) [7]. Für den Fall unpolarisierter Elektronen schätzen sie diese Störungen ab, doch treffen ihre Abschätzungen höchstens die Größenordnung. Die Störung durch Vielfachstreuung hat БОТНЕ [3] etwas später ausführlich untersucht, allerdings wieder für unpolarisierte Elektronen. Es wird sich herausstellen, daß die Störung durch Zweifachstreuung — zumindest

bei einigen oft üblichen Streugeometrien — merklich größer ist als die durch Vielfachstreuung, so daß BORNES Resultate auch für unpolarisierte Elektronen unvollständig sind. Während BORNE jedoch schrägen Einfall zuläßt, beschränken wir uns auf senkrechte Inzidenz.

§ 1. Das Problem

Elektronen mit der Anfangsrichtung t_0 und der Transversalpolarisation $p_0 = P \cdot h_0$ ($h_0 =$ Einheitsvektor mit $(t_0, h_0) = 0$) fallen senkrecht auf eine Schicht der Dicke d mit $(\text{Atomzahl/Volumen}) = N$. Wir betrachten die in Richtung t_s des Nachweisgerätes gestreuten Elektronen. t_s werde so gewählt, daß h_0 die Normale auf der durch t_0 und t_s definierten Streuebene ist, also:

$$[t_0, t_s] = h_0 \sin \vartheta_s; \quad (t_0, t_s) = \cos \vartheta_s. \quad (1)$$

Gesucht wird die Wahrscheinlichkeit $w(t_0 \rightarrow t_s; P)$ dafür, daß ein Elektron aus dem Anfangszustand t_0, P nach t_s gestreut wird.

Wir entwickeln w nach der Schichtdicke:

$$w = w_1 d + w_2 d^2 + \dots \quad (2)$$

Die Wahrscheinlichkeit für Einfachstreuung $w_1 d$ (das ist der *gewünschte* Term) ist bekannt. Der Term $w_2 d^2$ (die *Störung*) soll hier berechnet werden.

Dazu eine Vorbemerkung: Elektronen erleiden beim Durchgang durch Materie Kleinwinkelstreuung, die zu einer Gauß-artigen Richtungsverteilung um die Anfangsrichtung führt. Das mittlere Quadrat des Streuwinkels $\bar{\vartheta}^2$ erweist sich näherungsweise dem zurückgelegten Weg s proportional [s. (24)]: $\bar{\vartheta}^2 = 2\lambda s$. Da s von der Größenordnung d ist, können Streuwinkel $\vartheta_s \gg \sqrt{2\lambda d}$ durch Kleinwinkelstreuung praktisch nicht erreicht werden. Die nach t_s gestreuten Elektronen müssen also eine oder mehrere Großwinkelstreuungen erlitten haben. Da die Wahrscheinlichkeit für *eine* Großwinkelstreuung proportional d ist, tragen zum $w_2 d^2$ -Term höchstens noch die zweifach gestreuten Elektronen bei. Wir werden daher zunächst den Beitrag der einfach- und dann den der zweifachgestreuten Teilchen untersuchen.

§ 2. Beitrag der einfachgestreuten Elektronen

Das Elektron erleidet (Fig. 1 a) auf dem Weg von $z = 0$ bis z Kleinwinkelstreuung in Richtung t mit der Wahrscheinlichkeit $W(0 \rightarrow z, t_0 \rightarrow t)$. In der Lamelle dz mit der effektiven Schichtdicke $dz |(t_0, t)|$ erfolgt Großwinkelstreuung von $t \rightarrow t'$ mit der Wahrscheinlichkeit $N \sigma(t \rightarrow t') dz |(t_0, t)|$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\sigma(t \rightarrow t')$ wird unten angegeben. Darauf bewegt sich das Elektron zurück von z nach $z = 0$ und erleidet

Kleinwinkelstreuung von t' nach t_s mit der Wahrscheinlichkeit $W(z \rightarrow 0; t' \rightarrow t_s)$. Insgesamt hat man also als Streuwahrscheinlichkeit auf diesem Weg:

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = N \int_0^d dz \int d\Omega(t) \int d\Omega(t') \frac{W(0 \rightarrow z, t_0 \rightarrow t) \sigma(t \rightarrow t') W(z \rightarrow 0, t' \rightarrow t_s)}{|(t_0, t)|} \quad (3)$$

Durch Kleinwinkelstreuung ändern sich die Richtungen nur wenig. Wir setzen daher:

$$t = t_0 + \delta t; \quad t' = t_s + \delta t' \quad (4)$$

und behandeln δt und $\delta t'$ als klein. Wir haben nach diesen Größen bis zu quadratischen Gliedern zu entwickeln. Der Polarisationsvektor p_0

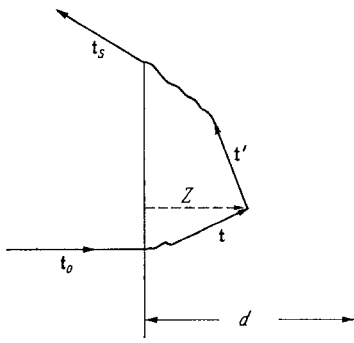


Fig. 1a. Das Schicksal eines einfach gestreuten Elektrons

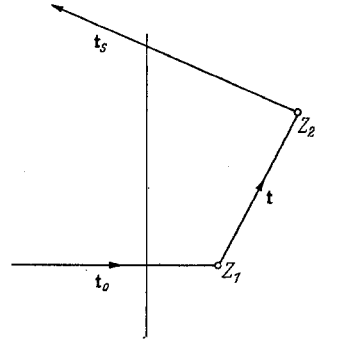


Fig. 1b. Das Schicksal eines zweifach gestreuten Elektrons

der auffallenden Elektronen ändert sich nach MÜHLSCHLEGEL und KOPPE [11] durch die Kleinwinkelstreuung um δt so, als ob diese Ablenkung durch ein makroskopisches Feld erfolgt wäre. Das bedeutet nach TOLHOEK [14] für p_0 den Übergang zu:

$$p = p_0 - (p_0, \delta t) \left(t_0 + \frac{\delta t}{2} \frac{E \text{ kin}}{E \text{ ges}} \right) \frac{E \text{ kin}}{E \text{ ges}}, \quad (5)$$

mit $E =$ Elektronenenergie. (5) gibt also die Polarisation der bei z von $t \rightarrow t'$ gestreuten Elektronen.

Die Kleinwinkelstreuwahrscheinlichkeiten W aus (3) hat BOTHE [3] angegeben. Sie lauten für den Spezialfall senkrechter Inzidenz:

$$\left. \begin{aligned} W(0 \rightarrow z, \delta t) &= e^{-|\delta t|^2/2 \lambda z / 2\pi \lambda z} \\ W(z \rightarrow 0, \delta t') &= (1 + \varepsilon) e^{-|\delta t'|^2 \cdot |\cos \vartheta_s|/2 \lambda z / 2\pi \lambda \frac{z}{|\cos \vartheta_s|}} \\ \varepsilon &= |\delta t'|^2 (t_0, \delta t') / 4\lambda z + |\delta t'|^2 / 2 + \\ &\quad + (t_0 t_s) |\delta t'|^4 / 8\lambda z + |\delta t'|^2 (t_0, \delta t')^2 / 4\lambda z \cdot |\cos \vartheta_s|. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Kritisches über (6) am Ende des §5. Die Gln. (6) gelten zunächst nur für unpolarisierte Elektronen. Nach MÜHLSCHLEGEL und KOPPE [11] ist die Winkelverteilung bei Kleinwinkelstreuung wegen der Kleinheit des SHERMANschen $S(\vartheta)$ jedoch polarisationsunabhängig (vgl. [13]).

Die Wahrscheinlichkeit für Großwinkelstreuung läßt sich nach TOLHOEK [14] in einer vom Koordinatensystem unabhängigen Schreibweise angeben. Ein Teilchen mit t_1, p_1 werde an einem Atom in Richtung t_2 gestreut. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es dann einen p_2 -durchlässigen Polarisator ($p_2 =$ Einheitsvektor) passiert, ist durch:

$$\sigma(t_1 \rightarrow t_2; p_1, p_2) = \frac{1}{2} \left[A(1, 2) (1 + (p_1, p_2)) + B(1, 2) (p_1 + p_2, [t_1, t_2]) + \right. \\ \left. + C(1, 2) \{ (p_1, t_1) (p_2, t_2) - (p_2 t_1) (p_1 t_2) \} + H(1, 2) \times \right. \\ \left. \times \{ (t_1 t_2) [(p_1 t_2) (p_2 t_1) + (p_1 t_1) (p_2 t_2)] - [(p_1 t_2) (p_2 t_2) + (p_1 t_1) (p_2 t_1)] \} \right] \quad (7)$$

gegeben. Das Argument $(1, 2)$ steht für $(t_1, t_2) = \cos \vartheta$. Dabei ist

$$A = \bar{I}, \quad B = D/\sqrt{1 - (t_1, t_2)}, \quad C = F/\sqrt{1 - (t_1, t_2)}, \quad H = G/\sqrt{1 - (t_1, t_2)}, \quad (8)$$

wobei \bar{I}, D, F, H bei TOLHOEK [14] definiert und von SHERMAN [13] teilweise tabelliert sind.

Das Elektron ist vor der Großwinkelstreuung im Zustand $t_1 = t_0 + \delta t$, $p_1 = p$ aus (5) und wird in die Richtung $t_2 = t_s + \delta t'$ gestreut. Da die nachfolgende Kleinwinkelstreuung und der Teilchennachweis polarisationsunabhängig sind, ist über p_2 zu summieren. Der so behandelte Ausdruck σ aus (7) ist für $\sigma(t \rightarrow t')$ in (3) einzusetzen.

Zur Integration von (3) bemerken wir, daß die Funktionen W wegen der Kleinheit von $2\lambda z$ nahezu δ -Funktionen sind. Wir entwickeln daher den Integranden (außer den beiden Exponentialfunktionen) bis zu quadratischen Gliedern in δt und $\delta t'$ und führen die Integration gliedweise durch. Die Rechnungen sind elementar und ergeben:

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = N d A \left\{ (1 + a 2\lambda d) (1 + P \cdot S(\vartheta_s)) + b 2\lambda d \cdot P \cdot S(\vartheta_s) \right\} \\ \left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|^3} + \frac{A'}{A} \left(\operatorname{tg}^2 \vartheta_s - \cos \vartheta_s \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{A''}{A} \frac{\sin^2 \vartheta_s}{2} \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) \right\} \\ b &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{\cos \vartheta_s} + \frac{T'}{T} \operatorname{tg}^2 \vartheta_s + \left[\frac{T''}{T} \sin^2 \vartheta_s + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{A'}{A} \left(\frac{T'}{T} \sin^2 \vartheta_s - \cos \vartheta_s \right) - 2 \frac{T'}{T} \cos \vartheta_s - 1 \right] \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

mit

$$T(x) = S(\arcsin x) / \sqrt{1 - x^2}$$

und

$2\lambda d = \bar{\vartheta}^2 =$ mittleres Streuwinkelquadrat für durchgehende Strahlung.

Alle Funktionen A , A' , T usw. sind an der Stelle $(t_0, t_s) = \cos \vartheta_s$ zu nehmen. Der Strich ' bedeutet die Ableitung nach dem Argument, also nach $\cos \vartheta_s$ und nicht nach ϑ_s . Die Funktionen A und S hat SHERMAN [13] tabelliert. Für praktische Belange reicht es meist, für $A(\cos \vartheta_s)$ die Rutherford-Streuwahrscheinlichkeit $\sim (1 - \cos \vartheta_s)^{-2}$ zu setzen. Dann lauten die Ausdrücke für a und b

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|^3} + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \vartheta_s + (3 + \cos \vartheta_s)(1 + 1/|\cos \vartheta_s|)}{1 - \cos \vartheta_s} \right\} \\ b &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{\cos \vartheta_s} - \frac{1 + \cos \vartheta_s}{1 - \cos \vartheta_s} \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T'}{T} \left(\operatorname{tg}^2 \vartheta_s + 2 \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) \right) + \frac{T''}{2T} \sin^2 \vartheta_s \left(1 + \frac{1}{|\cos \vartheta_s|} \right) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der Ausdruck für a deckt sich mit dem schon eingangs erwähnten Resultat von BOTHE [3]. Aus Gründen, die dort erwähnt werden, verlieren (9) und (10) für $\vartheta_s \approx \pi/2$ ihren Sinn.

§ 3. Beitrag der zweifachgestreuten Elektronen

Das einfallende Elektron wird an der Stelle z_1 aus der Anfangsrichtung t_0 in die Richtung t und dann bei z_2 von t nach t_s gestreut (vgl. Fig. 1 b). Von der Richtungsänderung durch Kleinwinkelstreuung darf man jetzt absehen, da diese, wie in § 2, erst Änderungen in der nächst höheren d -Potenz ergibt. Allerdings ist der Intensitätsverlust zu berücksichtigen, der dadurch auftritt, daß Elektronen aus der Anfangsrichtung und schließlich aus der Folie herausgestreut werden [vgl. (21)]. Dieser Intensitätsabfall längs des Weges s werde durch $K(s)$ beschrieben:

$$K(s \rightarrow 0) = 1 \quad K(s \rightarrow \infty) = 0 \quad K(s < 0) = 0. \quad (11)$$

Offenbar ist: s bis zum ersten Stoß $= z_1$; s zwischen den Stößen $= (z_2 - z_1)/(t_0 t)$; s nach dem zweiten Stoß $= z_2/|(t_0 t_s)|$. Wieder sei $(t_0, t_s) \neq 0$; dann sind z_1 und $z_2/|(t_0, t_s)|$ von der Größenordnung d . Für Laufwege s von dieser Größenordnung darf man $K(s) = 1$ setzen. Dagegen geht $K\left(\frac{z_2 - z_1}{(t_0, t)}\right) \rightarrow 0$, wenn $(t_0, t) \rightarrow 0$. In diesem Fall spielt K die Rolle eines konvergenzerzeugenden Faktors. Man hat noch zu erwarten, daß K vom Ort der ersten Streuung z_1 abhängt. Liegt z_1 z.B. nahe der Schichtoberfläche, so fällt $K(s)$ schneller ab als bei einer Mittelage von z_1 . Wir schreiben daher $K(s, z_1)$.

Alle einmal gestreuten Elektronen, die die Ebene z_2 passieren, kommen aus dem Gebiet $0 \leq z_1 \leq z_2$ bzw. $z_2 \leq z_1 \leq d$, wenn $(t_0, t) > 0$ bzw. < 0 . Die Größe $(z_2 - z_1)/(t_0, t)$ ist also niemals negativ. Das erleichtert zusammen mit der letzten Gl. (11) die Festlegung der Raumwinkelintegrationsgrenzen im folgenden Integral (12). Die Wahrscheinlichkeit

dafür, daß das Elektron durch Zweifachstreuung von $t_0 \rightarrow t_s$ gestreut wird, läßt sich sofort hinschreiben:

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = N^2 \sum_{p, p_s} \int d\Omega(t) \sigma(t_0 \rightarrow t; p_0, p) \sigma(t \rightarrow t_s; p, p_s) \times \left. \begin{array}{l} \\ \times \int_0^d dz_1 \cdot \int_0^d \frac{dz_2}{|(t_0, t)|} \cdot K\left(\frac{z_2 - z_1}{(t_0, t)}, z_1\right). \end{array} \right\} \quad (12)$$

Über die Polarisation p, p_s des Zwischen- und Endzustandes ist, wie weiter unten ausgeführt, zu summieren. Durch einfache Umformung folgt aus (12)

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = (Nd)^2 \sum_{p, p_s} \int d\Omega(t) \{ \sigma(t_0 \rightarrow t; p_0, p) F((t_0, t)) \sigma(t \rightarrow t_s; p, p_s) \} \left. \begin{array}{l} \\ F(x) = \frac{1}{d^2} \begin{cases} \int_0^d d\eta \int_0^{(d-\eta)/|x|} d\xi \cdot K(\xi, \eta) & \text{für } x > 0 \\ \int_0^d d\eta \int_0^{\eta/|x|} d\xi K(\xi, \eta) & \text{für } x < 0. \end{cases} \end{array} \right\} \quad (13)$$

Die Funktion $F(x)$ hat für kleine d einen δ -funktionsartigen Charakter, so daß näherungsweise:

$$F(x) = f \cdot \delta(x) \quad \text{mit} \quad f = \int_{-1}^{+1} F(x) dx. \quad (14)$$

Falls nämlich x nicht gerade $\ll 1$, so ist $d/|x|$ von der Größenordnung d und daher $K(\xi, \eta) = 1$, so daß $F(x) = 1/(2|x|)$. Dieser Ausdruck divergiert für $x \rightarrow 0$, aber hier gilt die Näherung nicht mehr; es kommt die konvergenzerzeugende Wirkung von $K(\xi \rightarrow \infty, \eta) \rightarrow 0$ ins Spiel.

Im Integral (13) ist über $d\Omega(t) = d(t_0, t) \cdot d\varphi_t$ zu integrieren. Drei Gebiete tragen wesentlich zum Wert des Integrals bei: $t \approx t_0$ wegen $\sigma(t_0 \rightarrow t, \dots)$, ebenso $t \approx t_s$ wegen $\sigma(t \rightarrow t_s, \dots)$ und endlich $|(t_0, t)| \approx 0$ wegen (14). Da wir jetzt ausdrücklich die *zweimal* um *große* Winkel gestreuten Elektronen betrachten, müssen wir die schon in §2 miterfaßten „Kleinwinkelstreuenden“ $t \approx t_0$ und $t \approx t_s$ ausschließen. Es bleibt dann wegen (14):

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = (Nd)^2 \cdot f \cdot \sum_{p, p_s} \int_0^{2\pi} d\varphi_t \{ \sigma(t_0 \rightarrow t; p_0, p) \cdot \sigma(t \rightarrow t_s; p, p_s) \}_{(t_0, t)=0}. \quad (15)$$

Wir werden zunächst $\int_0^{2\pi}$ und dann f berechnen.

§ 4. Berechnung von (15)

Beginne mit $\sum_{p, p_s} \{ \sigma(t_0 \rightarrow t; p_0, p) \cdot \sigma(t \rightarrow t_s; p, p_s) \}_{(t_0, t)=0}$. Die σ sind aus (7) zu entnehmen. Die Summation \sum_{p_s} über die Polarisation der Endzustände vernichtet alle Summanden, die linear in p_s sind. Die

Summation \sum_p über die Zwischenpolarisation muß richtig überlegt werden. Man bedenke dazu, daß $\sigma(t_0 \rightarrow t; p_0, p)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß nach der ersten Streuung ein p -durchlässiger Polarisator passiert wird. Ein solcher tatsächlich gar nicht vorhandener Polarisator ändert aber nur dann am Endresultat nichts, wenn $p = \pm [t, t_s]/|[t, t_s]| \equiv \pm n$ gewählt wird, da für die zweite Streuung nur die Komponente von p parallel zur Streuebenenormale n maßgeblich ist. In \sum_p haben wir also $p = \pm n$ zu setzen. Nach diesen Vorbemerkungen läßt sich die Integration (15) ohne Schwierigkeiten durchführen. Man erhält

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = (Nd)^2 f A(0) \left\{ (V_1 - T(0) \cos \vartheta_s \cdot V_2) (1 + P \cdot S(\vartheta_s)) + \right. \\ \left. + P \cdot S(\vartheta_s) \left(\frac{T(0) V_3 - \cos \vartheta_s V_4}{T \cdot \sin \vartheta_s} + \frac{C(0) \cdot V_5 - V_1 + T(0) \cdot \cos \vartheta_s \cdot V_2}{T \cdot A(0)} \right) \right\} \quad (16)$$

Wenn nicht anders vermerkt, sind die Funktionen A, T, V_i an der Stelle $(t_0, t_s) = \cos \vartheta_s$ zu nehmen. Die V_i sind Integrale, die von ϑ_s abhängen:

$$\left. \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} A(\sin \vartheta_s \cos \varphi) \left\{ \begin{array}{l} d\varphi \\ T(\sin \vartheta_s \cdot \cos \varphi) d\varphi \\ \cos \varphi \cdot d\varphi \\ T(\sin \vartheta_s \cdot \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ T(\sin \vartheta_s \cdot \cos \varphi) \cdot \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \end{array} \right\} \quad (17)$$

Bei der numerischen Auswertung der V_i mit Hilfe der Sherman-Werte [13] stellt sich heraus, daß für die praktisch interessierenden Streuwinkel $60^\circ \leq \vartheta_s \leq 120^\circ$ nur V_1 und V_3 berücksichtigt werden müssen. Der in jedem Integral vorhandene Faktor $A(x) \sim (1-x)^{-2}$ (Rutherford-Streuung) wird wegen $x = \sin \vartheta_s \cos \varphi \approx \cos \varphi$ im Gebiet $\varphi \approx 0$ sehr groß. Hier sind aber $T(\sin \vartheta_s \cdot \cos \varphi)$ und $\sin^2 \varphi$ sehr klein, so daß V_2, V_4 und besonders V_5 nahezu verschwinden.

Man kommt schnell zu einer guten Näherung für V_1 und V_3 . Da $A(x)$ im wesentlichen die Rutherford-Streuwahrscheinlichkeit bedeutet, setzen wir $A(x) = g(x) \cdot (1-x)^{-2}$, wobei $g(x)$ nur langsam veränderlich ist. Da der Hauptbeitrag aus der Gegend $x = \sin \vartheta_s$ kommt, gilt in guter Näherung $A(x) = A(\sin \vartheta_s) (1 - \sin \vartheta_s)^2 (1-x)^{-2}$. Setzt man dieses in die V_i -Integrale ein, so läßt sich die Integration geschlossen durchführen:

$$V_1 = 2\pi A(\sin \vartheta_s) \cdot (1 - \sin \vartheta_s)^2 \cdot |\cos \vartheta_s|^{-3}; \quad V_3 = \sin \vartheta_s \cdot V_1. \quad (18)$$

Die Näherung (18) ist um so besser, je näher ϑ_s bei $\pi/2$ liegt; aber selbst für $\vartheta_s = 60^\circ$ bzw. 120° und $\beta = 0,6$ beträgt die Differenz zwischen (18) und den durch numerische Integration von (17) gewonnenen exakten

Wertes nur 7%. Mit (18) erhält man endlich aus (16):

$$w(t_0 \rightarrow t_s) = N d A \cdot N d A(0) \cdot 2\pi f \cdot \frac{A(\sin \vartheta_s)}{A} \frac{(1 - \sin \vartheta_s)^2}{|\cos \vartheta_s|^3} \cdot \left\{ \dots \right\} \quad (19)$$

$$\left\{ \dots \right\} = 1 + P \cdot S(\vartheta_s) + (T(0)/T - 1) \cdot S(\vartheta_s) \cdot P.$$

Es bleibt noch die Berechnung von f gemäß (13) und (14). Wie wir sahen, tragen nur die Elektronen mit $(t_0, t) = 0$ zur Zweifachstreuung bei, also nur solche, die parallel zur Schichtoberfläche verlaufen. Betrachte nun ein solches Elektron, das an der Stelle z_1 in der y -Richtung startet ($y =$ Achse in der Schichtoberfläche). $K(y, z_1)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es nach dem Weg y noch in der Schicht verweilt. Zur Berechnung von K dient ein von FERMI [12] und BOTHE [3] angegebener Ausdruck:

$$H(y, z) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{3}{4\lambda y}} \cdot \frac{1}{y} \cdot e^{-\frac{3}{4\lambda y} \left(\frac{z-z_1}{y}\right)^2} dz \quad (20)$$

für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach dem Weg y im Intervall dz zu finden. Solange $0 \leq z \leq d$, ist das Elektron in der Schicht, also:

$$K(y, z_1) = \int_0^d H(y, z) dz = \frac{1}{2} \left\{ \Phi \left(\sqrt{\frac{3}{4\lambda y}} \frac{z_1}{y} \right) + \Phi \left(\sqrt{\frac{3}{4\lambda y}} \frac{d-z_1}{y} \right) \right\} \quad (21)$$

mit der Gaußschen Fehlerfunktion Φ . Wir sehen dieses K als die in (13) benötigte K -Funktion an. Durch Einsetzen in (13) und (14) folgt f als Resultat einer halb numerischen Integration:

$$f = 1,5 - \frac{1}{3} \ln 2\lambda d - 0,3 \sqrt{2\lambda d}. \quad (22)$$

Kritisches über (21) und (22) am Ende des §5.

§ 5. Numerisches und Kritisches

Polarisierte Elektronen wurden bisher meist an Goldfolien gestreut. Wir führen daher die folgenden numerischen Rechnungen am Goldbeispiel durch.

In (9) und (22) tritt 2λ auf. Wie schon in §1 erwähnt, bedeutet $2\lambda s = \overline{\vartheta^2}$ das mittlere Streuwinkelquadrat nach dem Laufweg s . Wir haben bisher angenommen, λ sei von s unabhängig. Das gilt nur näherungsweise. Tatsächlich findet man nach WILLIAMS [16] für Gold:

$$2\lambda = 18,9 \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \cdot \frac{1 - \beta^2}{\beta^4} \cdot \varrho \cdot \ln \left\{ 1,94 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \frac{s \varrho}{\beta^2} \right\} \quad (23)$$

mit $\varrho =$ Golddichte. Kritisches über (23) am Ende dieses §. λ hängt also noch schwach von s ab. Im Falle der Einfachstreuung (9) ist $s \approx d$,

so daß in (9) zu setzen ist:

$$2\lambda d = 18,9 \frac{\text{cm}^2}{g} \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \varrho \cdot d \cdot h(\beta, d) \quad (24)$$

mit der Hilfsfunktion

$$h(\beta, d) = \ln \left\{ 1,94 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{g} \cdot \frac{d\varrho}{\beta^2} \right\}. \quad (25)$$

Bei der Zweifachstreuung (22) sind die Laufwege länger. Das mittlere s eines bei $z_1 = d/2$ gestarteten Elektrons beträgt mit K aus (21):

$$\bar{s} = \int_0^\infty K(s, d/2) ds = 1,55 \cdot d \cdot (2\lambda d)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dieses \bar{s} in (23) eingesetzt führt auf:

$$2\lambda d = 18,9 \frac{\text{cm}^2}{g} \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \ln \left\{ 3 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{g} \cdot \frac{\varrho d}{\beta^2} (2\lambda d)^{-\frac{1}{2}} \right\} \cdot \varrho d. \quad (26)$$

(26) stellt eine transzendente Gleichung für $2\lambda d$ dar. Mit der Lösung $2\lambda d$ geht man in (22) und erhält schließlich f . Das Resultat läßt sich in guter Näherung ($\approx 2\%$) durch

$$f = 1,5 - \frac{1}{3} \ln \left\{ 63 \frac{\text{cm}^2}{g} \frac{1-\beta^2}{\beta^4} d\varrho \right\} - 0,3 \sqrt{63 \frac{\text{cm}^2}{g} \frac{1-\beta^2}{\beta^4} d\varrho} \quad (27)$$

für $0,4 \leq \beta \leq 0,8$ und alle praktisch vorkommenden Dicken $d\varrho$ analytisch wiedergeben.

Durch Zusammenfassung von (9) und (19) können wir jetzt die Streuwahrscheinlichkeit $w(t_0 \rightarrow t_s, P)$ bis zu den d^2 -Gliedern vollständig niederschreiben:

$$\left. \begin{aligned} w(t_0 \rightarrow t_s, P) &= N d A \left[(1 + (\eta_1 h + \eta_2 f) d\varrho) (1 + PS) + (\nu_1 h + \nu_2 f) d\varrho PS \right] \\ \eta_1 &= 18,9 \frac{\text{cm}^2}{g} (1 - \beta^2) a / \beta^4; & \eta_2 &= \frac{2\pi N A(0) \cdot A(\sin \vartheta_s) (1 - \sin \vartheta_s)^2}{\varrho A \cdot |\cos \vartheta_s|^3} \\ \nu_1 &= \eta_1 b / a; & \nu_2 &= \eta_2 (T(0) / T - 1), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

mit a, b aus (10) und f, h aus (27), (25).

Der Index_{1,2} an η und ν zeigt an, ob der Term von der Kleinwinkel- oder der Zweifachstreuung herrührt. η_i und ν_i wurden mit Hilfe der Sherman-Werte für $0,4 \leq \beta \leq 0,8$ und $60^\circ \leq \vartheta_s \leq 120^\circ$ berechnet (Tabelle 1). Für praktische Zwecke trägt man $\lg \eta_i$ und $\lg \nu_i$ über ϑ_s mit β als Parameter auf. Irgendwelche Zwischenwerte lassen sich daraus genügend genau interpolieren.

Zur Diskussion von (28) betrachte zunächst unpolarisierte Strahlung $P=0$. Die Störung $w_2 d^2/w$ aus (2) durch Kleinwinkel- und Zweifachstreuung beträgt dann offenbar

$$\{w_2 d^2/w\}_{P=0} = (\eta_1 h + \eta_2 f) d\varrho. \quad (29)$$

Der erste Term (= Kleinwinkelstreuung) ist der von BOTHE [3] angegebene. Für Streuwinkel $\vartheta_s > \pi/2$ überwiegt der zweite (= Zweifach-

Tabelle 1. Die Störfunktionen η_i und ν_i für Au. (Alle Angaben in cm^2/g)

β/ϑ_s		60°	67,5°	75°	80°	100°	105°	112,5°	120°
0,4	η_1	6500	8950	18300	45900	41000	14200	5280	2800
	η_2	873	2865	12570	52000	83000	28700	10500	5040
	ν_1	—	—	-18300	-26200	-8370	-3650	-1660	-950
	ν_2	—	8300	+14000	24000	-18300	-9170	-4000	-2270
0,5	η_1	2380	3260	6700	16700	14900	5150	1930	1020
	η_2	302	1015	4160	17250	29200	10080	3700	1900
	ν_1	-6200	-4650	-4650	-7400	-3180	-1420	-635	-351
	ν_2	+1480	1630	3160	6390	-6150	-1920	-1330	-836
0,6	η_1	975	1340	2750	6880	6130	2120	790	418
	η_2	126	399	1680	6960	12570	4340	1670	900
	ν_1	-1370	-1320	-1610	-2500	-1330	-596	-287	-175
	ν_2	353	467	1025	2440	-2890	-1260	-600	-405
0,7	η_1	420	575	1180	2960	2640	910	340	180
	η_2	55	172	714	2960	5690	1967	787	439
	ν_1	-500	-508	-632	-1030	-600	-290	-143	-88
	ν_2	121	184	414	980	-1250	-570	-314	-206
0,8	η_1	175	239	490	1230	1095	379	141	75
	η_2	23	72	294	1220	2520	870	370	218
	ν_1	-178	-181	-246	-409	-271	-135	-68	-45
	ν_2	45	74	162	415	-605	-270	-159	-111

streuung), so daß BOTHES Ausdrücke zur Korrektur der Störung unbrauchbar sind.

Im Falle polarisierter Strahlung bestimmt man aus der Links-Rechts-Asymmetrie den Polarisationsgrad P . Dazu vergleicht man die „linke Streuwahrscheinlichkeit“ $L = w(t_0 \rightarrow t'_s; P)$ mit der „rechten“ $R = w(t_0 \rightarrow t'_s; P)$, wobei t'_s aus t_s durch Spiegelung an t_0 hervorgeht. Damit formal gleichberechtigt, ist t_s festzuhalten und P durch $-P$ zu ersetzen. Aus (28) folgt dann im Rahmen unserer Näherung:

$$\frac{L}{R} = \frac{1 + (S + \delta S)P}{1 - (S + \delta S)P} \quad \text{mit} \quad \frac{\delta S}{S} = (\nu_1 h + \nu_2 f) d\rho. \quad (30)$$

$\nu_1 h$ und $\nu_2 f$ geben also die Änderung der S -Funktion durch Kleinwinkel- und Zweifachstreuung an. Für $\vartheta_s < \pi/2$ kann δS bei geeigneten Werten von ϑ_s , $d\rho$, β verschwinden, da hier $\nu_1 < 0$ und $\nu_2 > 0$; für $\vartheta_s > \pi/2$ ist $\delta S/S$ mit ν_1 und ν_2 stets negativ*.

* Dadurch erklärt sich wahrscheinlich eine Erfahrung von VISGNEWSKY et al. [15]. Sie stellten fest, daß ihre gemessene Streuasymmetrie von Cu-64-Elektronen an Goldfolien nur für Streuwinkel $\vartheta_s < \pi/2$ mit $P = -v/c$ vereinbar ist.

Der Vorteil $\delta S = 0$ für $\vartheta_s < \pi/2$ wird jedoch durch die Kleinheit von $S(\vartheta_s)$ und durch die krasse Winkelabhängigkeit der Streuwahrscheinlichkeit wieder zunichte gemacht. Beides setzt eine äußerst genaue Kenntnis (und Einhaltung!) der Streugeometrie voraus, so daß man besser im Bereich $\vartheta_s > \pi/2$ arbeitet und den Fehler δS rechnerisch erfaßt. Streuwinkel $\vartheta_s \approx \pi/2$ hat man zu meiden, da hier alle Störungen η_i, ν_i unendlich werden.

Um beurteilen zu können, wieweit die $w_2 d^2$ -Störung durch (29), (30) und Tabelle 1 richtig wiedergegeben wird, sind einige kritische Bemerkungen nötig: a) *Kleinwinkelstreuung*. Hier wurden die Botheschen Ausdrücke (6) gewählt. Nach MOLIERE [10] sind das Näherungen, die besonders bei dünnen Schichten nur die Größenordnung treffen. Dasselbe gilt für den Ausdruck (23) für $2\lambda \bar{d}$. Für Streuwinkel $\vartheta_s > \pi/2$ überwiegt allerdings die Störung durch Zweifachstreuung erheblich, so daß hier eine kleine Unkorrektheit im Kleinwinkelglied das Endresultat kaum beeinflußt. b) *Zweifachstreuung*. Die zur Bestimmung von f benötigte K -Funktion wurde nach (20) berechnet. Dieser Ausdruck setzt aber unendlich ausgedehnte Materie in z -Richtung voraus, während bei uns nur das Gebiet $0 \leq z \leq \bar{d}$ mit Materie erfüllt ist. Deswegen fällt die richtige K -Funktion etwas schneller ab als (21). Man schätzt jedoch leicht ab, daß dadurch der Ausdruck (22) für f nur unwesentlich geändert wird. Insbesondere bleibt die charakteristische \bar{d} -Abhängigkeit erhalten. Einzig das konstante Glied 1,5 wird etwas (vielleicht um 0,3) verringert. Diese *Überschätzung von f* wird sicher wieder wettgemacht durch die Näherung (14), welche zu einer geringen *Unterschätzung der Zweifachstreuung* führt. Nach allem dürften die hier angegebenen Ausdrücke für die $w_2 d^2$ -Störung bis auf etwa 15% genau sein, wenigstens für $\vartheta_s > \pi/2$. Da die nichtbetrachteten Störterme $w_3 d^3 + \dots$ bei den üblichen Schichtdicken etwa von der Größenordnung dieser Ungenauigkeit sein dürften, reicht diese Genauigkeit aus.

§ 6. Vergleich mit der Erfahrung

BIENLEIN [1] hat die Streuwahrscheinlichkeit $w(t_0 \rightarrow t_s; P=0)_{\vartheta_s=120^\circ}$ an Au-Folien verschiedener Dicke $d \rho \leq 0,6 \text{ mg/cm}^2$ für $\beta = 0,68$ gemessen. Sein Resultat läßt sich durch $w = \tilde{\alpha} \bar{d} (1 + \tilde{\beta} d \rho)$ mit $\tilde{\beta} = (1700 \pm 170) \text{ cm}^2/\text{g}$ darstellen. Nach (29) und Tabelle 1 berechnet man $\tilde{\beta} = \eta_1 h + \eta_2 f = (420 + 1200) \text{ cm}^2/\text{g} = 1620 \text{ cm}^2/\text{g}$ in Übereinstimmung mit dem Experiment. Der Hauptteil der d^2 -Störung, nämlich $1200/1620 = 74\%$, erfolgt durch Zweifachstreuung.

FRAUENFELDER et al. [6] maßen die Polarisation der Co^{60} -Elektronen durch Streuung an Au-Folien. Sie finden (Tabelle 2) für verschiedene β (Spalte 1) und verschiedene Dicken $\rho \bar{d}$ (Spalte 2), verschiedene Asymmetrien (Spalte 3). Man darf heute sicher sein, daß der Polarisationsgrad recht genau $P = -\beta$ ist [2]. Berechnet man damit die Asymmetrie $(L/R)_0 = (1 + PS)/(1 - PS)$ ohne Beachtung der d^2 -Störung, so erhält man Spalte 4, die nicht mit den Messungen vereinbar ist. Das ist nicht verwunderlich, da die nach (30) berechneten Störungen $\delta S/S$ (Spalte 5) teilweise erheblich sind. Bestimmt man L/R gemäß (30), so folgt die letzte Tabellenspalte, die selbst noch für $\delta S/S \approx -0,5$ die Meßresultate

richtig wiedergibt, obwohl unsere Betrachtungen nur für $\delta S/S \ll 1$ Gültigkeit beanspruchen können.

Bei Steigerung der Meßgenauigkeit sollten schon deshalb Abweichungen zwischen der 3. und letzten Spalte sichtbar werden, da man

Tabelle 2

β	$\bar{a} \rho / \text{mg/cm}^2$	$(L/R)_{\text{exp.}}$	$(L/R)_0$	$\delta S/S$	$L/R (3\sigma)$
0,41	0,15	$1,03 \pm 0,03$	1,35	-1,07	0,98
0,47	0,15	$1,13 \pm 0,02$	1,40	-0,55	1,16
0,49	0,15	$1,30 \pm 0,09$	1,44	-0,45	1,22
0,49	0,05	$1,35 \pm 0,06$	1,44	-0,13	1,37

neben der Störung in der Streufolie noch die Depolarisation in der Quelle [11], die Abschirmung durch die Hülle [9] und die unvermeidliche Wandstreuung [2] berücksichtigen muß.

Ich habe Herrn Professor Dr. R. FLEISCHMANN für sein förderndes Interesse, Herrn BIENLEIN für manche klärende Diskussion zu danken.

Literatur

- [1] BIENLEIN, H.: Diss. Erlangen 1958. — [2] BIENLEIN, H., R. FLEISCHMANN u. H. WEGENER: Z. Physik **150**, 80 (1958). — [3] BOTHE, W.: Sitzgsber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. **1951**, 7. Abh. — [4] CHASE, C.T., and R.T. COX: Phys. Rev. **58**, 246 (1940). — [5] WAARD, H. DE, and O. J. POPEMA: Physica, Haag **28**, 597 (1957). — [6] FRAUENFELDER, H., R. BOBONE, E. V. GOELER, N. LEVINE, H. R. LEWIS, R. N. PEACOCK, A. ROSSI and G. DE PASQUALI: Phys. Rev. **106**, 386 (1957). — [7] GOERTZEL, G., and R. T. COX: Phys. Rev. **63**, 37 (1943). — [8] HEINTZE, J.: Z. Physik **148**, 560 (1957). — [9] MOHR, C. B. O., and L. J. TASSIE: Proc. Phys. Soc. Lond. A **67**, 711 (1954). — [10] MOLIÈRE, G.: Z. Naturforsch. **3a**, 78 (1948). — [11] MÜHLSCHLEGEL, B., u. H. KOPPE: Z. Physik **150**, 474 (1958). — [12] ROSSI, B., and K. GREISEN: Rev. Mod. Phys. **13**, 240 (1941). — [13] SHERMAN, N.: Phys. Rev. **103**, 1601 (1956). — [14] TOLHOEK, H. A.: Rev. Mod. Phys. **28**, 277 (1956). — [15] VISHNEVSKY, M. E., V. K. GRIGORIEV, V. A. ERGAKOV, S. J. NIKITIN, E. V. PUSHKIN and YU. V. TREBUKOVSKY: Nuclear Phys. **4**, 271 (1957). — [16] WILLIAMS, E. J.: Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A **169**, 531 (1939).